Dokaz: Jasno, $S \subseteq L^p(X)$. Neka je $f \in L^p(X)$ realna i $f \geq 0$ (ako je f kompleksna, posebno posmatramo njen realan i imaginaran deo razložen na pozitivan i negativan deo: $f = u_+ - u_- + i(v_+ - v_-)$). Neka je $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ niz jednostavnih funkcija datih Teoremom 1.7. Kako je $0 \leq s_n \leq f$, sledi da je $s_n \in L^p(X)$ i $s_n \in S$. Kako je $|f - s_n|^p \leq f^p$, na osnovu teoreme o dominantnoj konvergenciji sledi $\|f - s_n\|_p \to 0$, $n \to \infty$. ■

Napomena: Specijalno, ako posmatramo merljiv prostor $(\mathbf{R}, \mathcal{B}_{\mathbf{R}}, m)$, tada je $L^p(\mathbf{R})$ kompletiranje prostora $(C_c(\mathbf{R}), \|\cdot\|_p)$. Ovde $C_c(\mathbf{R})$ označava skup kompleksnih neprekidnih funkcija sa kompaktnim nosačem (nosač funkcije f je zatvarenje skupa $\{x \in \mathbf{R} : \ f(x) \neq 0\}$).

Primer 8.1. Neka je $X = \mathbf{N}$ i μ mera prebrojavanja. Tada se prostor $L^p(\mathbf{N})$, $1 \leq p < \infty$, označava sa l^p. Elemenat prostora l^p je realan ili kompleksan niz $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ za koji važi da je $\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$. Za $p = \infty$ prostor l^∞ čine ograničeni nizovi i definišemo normu sa $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbf{N}} |x_n|$.

Primer 8.2. Dat je merljiv prostor $(\mathbf{R}, \mathcal{B}_{\mathbf{R}}, m)$ i funkcija $f_a(x) = x^{-a}$, $a > 0$. Tada $f_a \kappa_{(0,1)} \in L^p(\mathbf{R})$ ako i samo ako $p < a^{-1}$ i $f_a \kappa_{(1,\infty)} \in L^p(\mathbf{R})$ ako i samo ako $p > a^{-1}$. Ovaj primer opisuje dva razloga zašto neka funkcija ne mora da pripada prostoru $L^p(\mathbf{R})$: ili $|f|^p$ previše brzo beži u beskonačnost u okolini neke tačke, ili ne opada dovoljno brzo u beskonačnosti. U prvom slučaju se ponašanje $|f|^p$ pogoršava kako se p povećava, a u drugom slučaju se popravlja. Drugim rečima, za $p < q$, funkcije iz L^p mogu biti lokalno singularnije od onih u L^q, dok funkcije iz L^q mogu biti globalno raširenije od onih u L^p.

8.3 Prostor $L^\infty(X)$

Definicija 8.2. Prostor *esencijalno ograničenih funkcija*, u oznaci $L^\infty(X)$, je skup funkcija $f : X \to \bar{\mathbf{C}}$ za koje važi da postoji $A \subseteq X$, $\mu(A) = 0$ i postoji $C > 0$ tako da je

$$\sup |f(x)| \leq C, \ x \in X \setminus A.$$

Ako je $f \in L^\infty(X)$ i ako je $A \subseteq X$, $\mu(A) = 0$, definišemo:

$$S(A) = \sup_{x \in X\setminus A} |f(x)|,$$

i *esencijalni supremum funkcije* dat sa

$$\operatorname{esssup} f = \inf\{S(N) : \ N \subseteq X, \mu(N) = 0\}.$$

▲